

Equations différentielles, évaluation.

Type (E) : $y' + ay = b$ avec a et b constantes

Solutions du type $f(x) = k e^{-ax} + \frac{b}{a}$ où k est une constante réelle quelconque.

k dépend des conditions initiales.

Rappels dérivées

$$\begin{aligned}(U \times V)' &= U' \times V + U \times V' \\ \left(\frac{U}{V}\right)' &= \frac{U' \times V - U \times V'}{V^2} \\ (e^U)' &= U' e^U\end{aligned}$$

Exercice 1.

Résoudre les équations différentielles

$$y' = 3y \quad \text{et} \quad y(0) = 1$$

$$y' + 2y = 1 \quad \text{et} \quad y(0) = 0$$

$$2y' - 3y = 4 \quad \text{et} \quad y(0) = 1$$

Exercice 2.

On considère l'équation différentielle E : $y' - y = -\frac{e^x}{x^2}$ où y est fonction de la variable x définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ de fonction dérivée y' . On donne comme conditions initiales $y(1)=0$.

Résoudre l'équation homogène associée : $y' - y = 0$

Vérifier que la fonction $g(x) = \frac{e^x}{x}$ est une solution particulière de (E). En déduire les solutions de (E).

Exercice 3 : utilisation d'un logiciel.

Dans MAXIMA, 'diff(y, x) signifie y'

```
(%i1) ode2('diff(y,x)*2-y/2=x+1, y, x);
(%o1) y = \left( \frac{(-4x-16)e^{-\frac{x}{4}} - 4e^{-\frac{x}{4}} + c_1}{2} \right) e^{x/4}
(%i2) expand(%);
(%o2) y = c_1 e^{x/4} - 2x - 10
-->
(%i3) ic1(%o2, x=0, y=2);
(%o3) y = 12 e^{x/4} - 2x - 10
```

En utilisant les informations du logiciel MAXIMA, donner :

- l'équation différentielle à résoudre
- Une solution particulière de l'équation différentielle
- Les conditions initiales
- La solution de l'équation différentielle

Exercice sur les équations différentielles du second ordre.

Vérifier que la fonction $f(t) = \frac{e^{2t}}{2}$ est solution particulière de l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + 2y = e^{2t}$$

Bonus : retrouver les solutions de MAXIMA de l'exercice 3.

Eléments de correction

Exercice 1

```
(%i1) ode2('diff(y,x)=3*y, y, x);
```

```
(%o1) y=%c %e3 x
```

```
(%i2) ic1(%o1, x=0, y=1);
```

```
(%o2) y=%e3 x
```

```
(%i4) ode2('diff(y,x)+2*y=1, y, x);
```

```
(%o4) y=%e-2 x * (  $\frac{\%e^{2 x}}{2} + \%c$  )
```

```
(%i5) expand(%);
```

```
(%o5) y=%c %e-2 x +  $\frac{1}{2}$ 
```

```
(%i6) ic1(%o5, x=0, y=0);
```

```
(%o6) y= $\frac{\%e^{-2 x} (\%e^{2 x} - 1)}{2}$ 
```

```
(%i7) expand(%);
```

```
(%o7) y= $\frac{1}{2} - \frac{\%e^{-2 x}}{2}$ 
```

```
(%i8) ode2(2*'diff(y,x)-3*y=4, y, x);
```

```
(%o8) y= $\left( \%c - \frac{4 \%e^{-\frac{3 x}{2}}}{3} \right) \%e^{\frac{3 x}{2}}$ 
```

```
(%i9) expand(%);
```

```
(%o9) y=%c %e $\frac{3 x}{2}$  -  $\frac{4}{3}$ 
```

```
(%i10) ic1(%o9, x=0, y=1);
```

```
(%o10) y= $\frac{7 \%e^{\frac{3 x}{2}} - 4}{3}$ 
```

```
(%i11) expand(%);
```

```
(%o11) y= $\frac{7 \%e^{\frac{3 x}{2}}}{3} - \frac{4}{3}$ 
```

Exercice 2

Erreur de texte, x=0 est une valeur impossible.

```
(%i14) ode2('diff(y,x)-y=-exp(x)/x^2, y, x);
```

```
(%o14) y= $\left( \frac{1}{x} + \%c \right) \%e^x$ 
```

```
(%i15) expand(%);
```

```
(%o15) y= $\frac{\%e^x}{x} + \%c \%e^x$ 
```

```
(%i16) ic1(%o15, x=0, y=0);
```

```
exp: undefined: 0 to a negative exponent.
```

```
#0: ic1(soln=y = %e^x/x+%c*%e^x,xc=x = 0,yc=y = 0) (C:\maxima-5.40.0\share\maxima\5.40.0\share\diffequations\ode2.mac line 323)
```

```
-- an error. To debug this try: debugmode(true);
```

Exercice 3

L'équation différentielle est (E) : $2 y' - \frac{y}{2} = x + 1$

Une solution particulière est $y = -2x - 10$

Les conditions initiales sont $f(0) = 2$

La solution de (E) est $f(x) = 12e^{\frac{x}{4}} - 2x - 10$

Exercice 4

$f(t) = \frac{e^{2t}}{2}$ $f'(t) = \frac{2e^{2t}}{2} = e^{2t}$ $f''(t) = 2e^{2t}$

Bonus.

Reprenre la méthode de l'exercice 2.